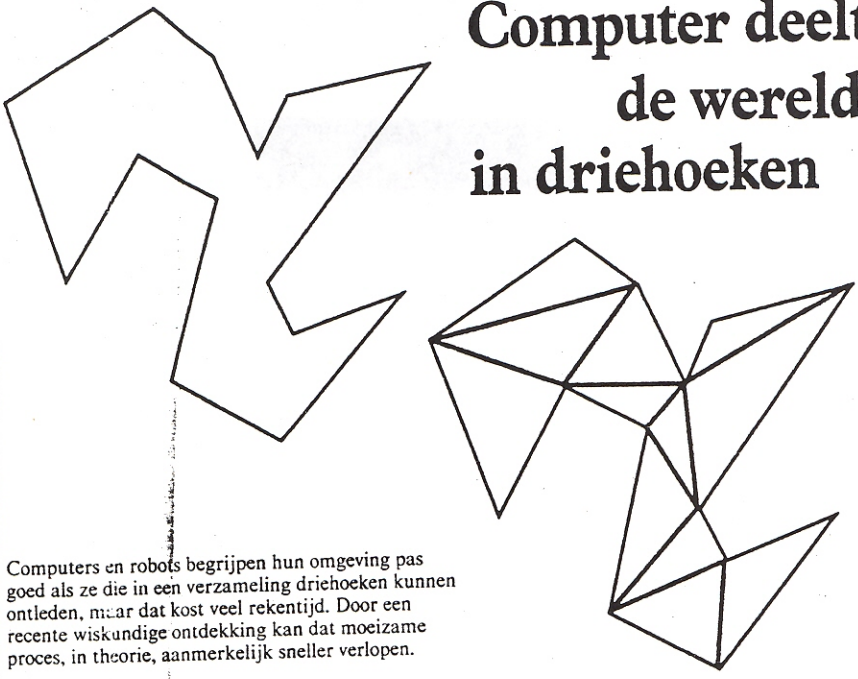
# Computer deelt de wereld op in driehoeken



Computers en robots begrijpen hun omgeving pas goed als ze die in een verzameling driehoeken kunnen ontleden, maar dat kost veel rekentijd. Door een recente wiskundige ontdekking kan dat moeizame proces, in theorie, aanmerkelijk sneller verlopen.

INFORMATICUS prof. dr M. Overmars, met 31 jaar een van de jongste hoogleraren aan de Rijksuniversiteit Utrecht, hoeft amper na te denken over een voorbeeld dat het belang van de recente ontdekking van zijn collega Bernard Chazelle illustreert. Die Amerikaanse wiskundige van de universiteit van Princeton — Overmars noemt hem steevast bij zijn voornaam — vestigde een snelheidsrecord bij het ontleden van veelhoeken in driehoeken.

Neem nou een woordenboek, zegt Overmars. Wat doe je als je een bepaald woord zoekt? Je grijpt ergens middenin en bepaalt of het gezochte woord voor of na die pagina ligt. Herhaal dat proces in de juiste helft, tot de correcte bladzijde voorligt.

„Maar als je eenmaal daar bent", zegt Overmars, „ga je plotseling iets anders doen, je loopt meestal woord voor woord de kolom af tot je het gezochte woord hebt. Op de een of nadere manier weet je als mens feilloos welke zoekstrategie het snelste werkt. Een computer weet dat niet als je het hem niet uitlegt."

Ogenschijnlijk heeft het voorbeeld niets te maken met de recente berichten over het ontleden van veelhoeken, die in een beperkte kring wiskundigen en informatici enig opzien hebben gebaard. Maar de daar gebruikte versneltruc heeft toch aardig wat weg van het zoeken in een woordenboek.

Het ontleden van een veelhoek in driehoeken, zegt Overmars, terwijl hij de kersverse publikatie van Chazelle doorbladert, is eigenlijk een kwestie van sorteren. In dit geval van hoekpunten die bij elkaar horen, en niet van woorden.

Dat sorteren nodig is, komt doordat een computer een veelhoek niet ziet zoals iedere menselijke waarnemer dat kan: als een samenhangende figuur. De machine moet het doen met een verzameling getalletjes (coördinaten) die aangeven waar de hoekpunten van de figuur zich bevinden.

Om daar de paren uit te selecteren die de zijde van een driehoek markeren, is een zoektocht nodig waarin alle combinaties van hoekpunten met alle andere hoekpunten bekeken worden. Het aantal stappen in de zoektocht gaat dan ongeveer gelijk op met het kwadraat van het aantal hoekpunten in de veelhoek.

Waar zelfs een kind de driehoeken in een veelhoek kan vinden, heeft een computer er de grootste moeite mee. Hij wint alleen omdat de machine de stappen veel sneller kan maken dan een mens.

Maar botte rekenkracht is, als het al voldoende is, voor puristen onder de informatici weinig bevredigend. Eind jaren zeventig toonden drie Amerikaanse wiskundigen aan dat er een fundamenteel snellere manier van ontbinden in driehoeken mogelijk was. Die verloopt ongeveer even veel sneller als de verdeeltruc bij een woordenboek vlotter gaat dan het doornemen van het hele boek van a tot z. Ingewijden hebben het over een snelheid van de orde *NlogN*. Maar de voor de hand liggende vraag was of het niet nog sneller zou kunnen.

Chazelle heeft dat kunststuk nu volbracht: hij stelde een methode op waarbij de zoektijd vrijwel gelijk opgaat met het aantal hoekpunten van een veelhoek. Een duizendhoek vergt dan slechts duizend stappen voor een verdeeling in driehoeken, wat toch aanmerkelijk vlotter is dan de miljoen stappen van de zoektocht waarbij alle hoekpunten met elkaar werden vergeleken. En ook nog behoorlijk veel sneller dan de ongeveer drieduizend stappen van de woordenboekmethode uit de jaren zeventig. Het technische bewijs is vervat in een wetenschappelijk artikel van veertig pagina's wiskunde, die slechts het handjevol experts in de wereld kan doorgronden.

Het verdelen van veelhoeken in driehoeken is een uiterst belangrijk stuk gereedschap in een gebied van de informatica dat computationele geometrie wordt genoemd. Beoefenaren van die discipline, Overmars schat dat er wereldwijd zo'n duizend mensen aan werken, houden zich bezig met de vraag hoe je met een computer figuren en ruimtelijke structuren kunt hanteren.

Dat heeft in de praktijk groot belang voor robots die door ruimtes moeten kunnen bewegen zonder zichzelf of hun omgeving te beschadigen. Bovendien blijken er wezenlijke toepassingen in *computer graphics*, de technieken waarmee computers plaatjes op het beeldscherm toveren. Overmars: „In beide gevallen moet de machine zijn omgeving of een ruimte op een efficiënte manier in kaart brengen om er mee te kunnen manipuleren."

Het blijkt verreweg het handigste om die omgeving op te vatten als een enorme verzameling aangrenzende driehoekjes, legt de Utrechtse hoogleraar uit. „Neem een graphic van een kamer waar je als een vlieg doorheen beweegt. Tijdens je vlucht verandert het perspectief voortdurend. Verre objecten verdwijnen soms achter objecten op de voorgrond en duiken vervolgens weer op."

Als een computer dat punt voor punt moet berekenen, wordt de zaak enorm traag. Maar de objecten zijn ook te zien als veelhoeken die zijn opgebouwd uit een aantal driehoeken. „Van twee driehoeken is heel snel na te gaan of ze overlappen of niet. En perspectivische veranderingen van een driehoek zijn ook triviaal. Het vergt dan alleen nog tijd om een omgeving te verdelen in zulke gemakkelijk hanteerbare driehoeken."

Voor een vaststaande omgeving is zo'n verdeeltruc maar één keer nodig, namelijk bij het opmaken van een plattegrond. Maar in steeds meer gevallen in de robotica staat er helemaal niets meer vast. De machine is dan aangewezen op zijn eigen zintuigen en reactievermogen. Daarbij is het belangrijk dat er voortdurend een hanteerbaar beeld van de omgeving bestaat. „Als een onbemande Mars-lander aan de rand van een krater plotseling niet meer weet wat hij moet, kun je hem niet even een zetje in de goeie richting geven."

De snellere zoekstrategie van Chazelle, benadrukt de Utrechtse hoogleraar, is in de eerste plaats een theoretisch resultaat. Het is in zijn idee verre van zeker dat er in de praktijk ook mee gewerkt zal worden, omdat een computerprogramma dat het kunstje uitvoert, bijzonder omvangrijk zou zijn. Het aantal zoekstappen voor de oplossing van het verdeelvraagstuk — de maat die theoretici hanteren — mag dan minimaal zijn, maar elke stap is zo ingewikkeld dat hij juist relatief veel tijd vraagt. Netto kan het gebruik van de nieuwe methode zelfs tijdverlies betekenen in plaats van winst.

Overmars: „Voor bepaalde processen waarbij zeer veel hoekpunten betrokken zijn, is Bernard's methode bruikbaar. Dat kun je zelfs strikt wiskundig bewijzen. Maar voor de meeste toepassingen in grapics en robotica voldoen de bestaande technieken, ook al halen ze in theorie niet het onderste uit de kan."

MARTIJN VAN CALMTHOUT